نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **درجه ۲**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = 2 \ , \ P = \alpha\beta = -4$$

حال معادلهٔ جدیدی را می‌خواهیم که $\alpha^2$ و $\beta^2$ ریشه‌های آن باشد:

$$S = \alpha^2 + \beta^2 = (S^2 - 2P) = 12$$
$$P = \alpha^2\beta^2 = 16$$

معادلهٔ درجهٔ دوم جدید $x^2 - Sx + P = 0$ خواهد بود یعنی $x^2 - 12x + 16 = 0$، که در این‌جا $b = -12$ و $c = 16$ خواهد بود و مقدار $c - b = 28$ می‌باشد.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$\alpha + \beta = -2a$ و $\alpha\beta = b$، قرار می‌دهیم: $y = \alpha + \beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

بنابراین:

$$y = -2a + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \Rightarrow (y + 2a)^2 = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 4ay + 4a^2 = \alpha^2 + \beta^2$$
$$\Rightarrow y^2 + 4ay + 4a^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4a^2 - 2b$$
$$\Rightarrow y^2 + 4ay + 2b = 0 \Rightarrow x^2 + 4ax + 2b = 0$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

ریشهٔ معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$x = \alpha \xrightarrow{۲x^۲-۷x+۱=۰} ۲\alpha^۲ - ۷\alpha + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲\alpha^۲ = ۷\alpha - ۱ \quad (*)$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-۷}{۲} = \frac{۷}{۲}$$

$$۲\alpha^۲ + ۷\beta \overset{(*)}{=} ۷\alpha - ۱ + ۷\beta = ۷\alpha + ۷\beta - ۱ = ۷\underbrace{(\alpha + \beta)}_{S} - ۱$$

$$= ۷ \times (\frac{۷}{۲}) - ۱ = \frac{۴۹}{۲} - ۱ = \frac{۴۹-۲}{۲} = \frac{۴۷}{۲}$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۱

گزینهٔ «۱»

چون $\alpha$ ریشهٔ معادله است لذا در آن صدق می‌کند.

$$\alpha^۲ - ۳\alpha - ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۳\alpha + ۱ \xrightarrow{\times\alpha} \alpha^۳ = ۳\alpha^۲ + \alpha$$

$$\xrightarrow{\alpha^۲=۳\alpha+۱} \alpha^۳ = ۳(۳\alpha + ۱) + \alpha = ۹\alpha + ۳ + \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^۳ = ۱ = \alpha + ۳$$

$$\alpha^۳(۳ + ۱۰\beta) = (۱۰\alpha + ۳)(۳ + ۱۰\beta)$$

$$= ۳۰\alpha + ۱۰۰\alpha\beta + ۹ = ۳۰\beta = ۱۰۰(\alpha + \beta) + ۳۰(\alpha + \beta) + ۹$$

می‌دانیم:

$$\begin{cases} \alpha.\beta = \frac{c}{a} = -۱ \\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-(-۳)}{۱} = ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha^۳(۳ + ۱۰\beta) = ۱۰۰(-۱) + ۳۰(۳) + ۹$$

$$= -۱۰۰ + ۹۰ + ۹ = -۱۰۰ + ۹۹ = -۱$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$۳x^۲ - ۵x + ۲ - m = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{۵}{۳} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{۲-m}{۳} \end{cases}$$

$$۵\alpha + ۳\beta = -۱ \Rightarrow ۲\alpha + ۳\underbrace{(\alpha + \beta)}_{s} = -۱ \Rightarrow ۲\alpha + ۳(\frac{۵}{۳}) = -۱$$

$$\Rightarrow ۲\alpha = -۶ \Rightarrow \alpha = -۳ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{۵}{۳} \Rightarrow -۳ + \beta = \frac{۵}{۳} \Rightarrow \beta = \frac{۱۴}{۳}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow (-۳)(\frac{۱۴}{۳}) = \frac{۲ - m}{۳} \Rightarrow -۴۲ = ۲ - m \Rightarrow m = ۴۴$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

جواب‌های معادلهٔ $x^2 + bx + c = 0$ را $x_1$ و $x_2$ و جواب‌های معادلهٔ $x^2 + 6x + 1 = 0$ را $\alpha$ و $\beta$ در نظر می‌گیریم، پس داریم:

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -b \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = c \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -6 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha^2 + 1 \\ x_2 = \beta^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 \\ = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2 = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 36 = -b \Rightarrow b = -36$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

ابتدا $\alpha$ را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\alpha^2 - 7\alpha = -2 \Rightarrow 7\alpha - \alpha^2 = 2 \Rightarrow \alpha(7 - \alpha) = 2$$

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) \xrightarrow[\alpha+\beta=7]{\alpha\beta=\frac{c}{a}=2} 2(7) = 14$$

عبارت $= \sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

چون $\alpha$ و $\beta$ صفرهای معادله‌اند لذا در معادله صدق می‌کنند، بنابراین داریم:

$$3\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را به (۴-) جمع می کنیم.}}$$

$$3\alpha^2 + \alpha - 1 - 4 = -4 \Rightarrow 3\alpha^2 + \alpha - 5 = -4$$

$$3\beta^2 + \beta - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را درضرب می کنیم}}$$

$$6\beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین با ۲جمع شود}}$$

$$6\beta^2 + 2\beta - 2 - 2 = -2 \Rightarrow 6\beta^2 + 2\beta - 4 = -2$$

$$\frac{3\alpha^2 + \alpha - 5}{6\beta^2 + 2\beta - 4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینهٔ «۲»

$$x^{۲} - ۵x - ۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = ۵ \\ P = \alpha\beta = -۸ \end{cases}$$

چون $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^{۲} - ۵x - ۸ = ۰$ هستند پس در معادله صدق می‌کنند:

$$\alpha^{۲} - ۵\alpha - ۸ = ۰ \Rightarrow \alpha^{۲} - ۵\alpha = ۸$$
$$\beta^{۲} - ۵\beta - ۸ = ۰ \Rightarrow \beta^{۲} - ۵\beta = ۸$$
$$A = \frac{\alpha^{۲} - ۵\alpha}{\beta} + \frac{\beta^{۲} - ۵\beta}{\alpha} = \frac{۸}{\beta} + \frac{۸}{\alpha} = \frac{۸\alpha + ۸\beta}{\alpha\beta}$$
$$= \frac{۸(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{۸(۵)}{-۸} = -۵$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ «۳»

$$۳x^{۲} + (m + ۱)x - ۶ = ۰$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-m - ۱}{۳}, \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۶}{۳} = -۲$$

از طرفی $\alpha + ۳\beta = ۱$ پس داریم:

$$\begin{cases} \alpha + ۳\beta = ۱ \Rightarrow \alpha = ۱ - ۳\beta \\ \alpha\beta = -۲ \xrightarrow{\alpha = ۱ - ۳\beta} (۱ - ۳\beta)\beta = -۲ \Rightarrow -۳\beta^{۲} + \beta + ۲ = ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \beta = ۱ \Rightarrow \alpha = -۲ \\ \beta = \frac{-۲}{۳} \Rightarrow \alpha = ۳ \end{cases}$$

حالا باید ۲ حالت را بررسی کنیم:

$$۱)\ \alpha = -۲, \beta = ۱ \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-m-۱}{۳} = -۱ \Rightarrow m = ۲$$

قابل قبول $\Rightarrow ۳x^{۲} + ۳x - ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰$

$$۲)\ \alpha = ۳, \beta = \frac{-۲}{۳} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-m-۱}{۳} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow m = -۸$$

قابل قبول $\Rightarrow ۳x^{۲} - ۷x - ۶ = ۰ \Rightarrow \Delta > ۰$

پس هر دو حالت قابل قبول است و در نتیجه:

مجموع مقادیر $m = -۸ + ۲ = -۶$